第Ⅳ卷　编校技能测试(70 分)

编校题:按照编校要求改正下列校样中的错误,个别地方改正方式不唯一,修改合理即给分,共 70 分,改不误为误,倒扣分。本卷在试卷中作答,考试结束后交回。

知识点 1　集合与常用逻辑用语

1. 有限集合的子集个数

对于有限集 A,B,C,设集合 A 中含有 n 个元素,集合 B 中含有 m 个元素($n,m\in\mathbf{N}^*$,且 $m<n$). 若 $B\subseteq C\subseteq A$,则集合 C 的个数为 2^{n-m};若 $B\subseteq C\subsetneqq A$,则集合 C 的个数为 $2^{n-m}-1$;若 $B\subsetneqq C\subseteq A$,则集合 C 的个数为 2^{n-m};若 $B\subsetneqq C\subsetneqq A$,则集合 C 的个数为 $2^{n-m}-2$.

2. 利用集合间的关系判断充分、必要条件的方法

集合	关系	p 是 q 的________条件
$A=\{x\mid p(x)\}$, $B=\{x\mid q(x)\}$	$A\subseteq B$	充分不必要
	$B\subseteq A$	必要不充分
	$A=B$	充要
	$A\nsubseteq B$ 且 $B\nsubseteq A$	即不充分也不必要

知识点 2　解三角形

$\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c.

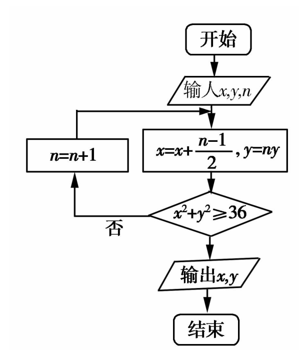
基本类型	一般解法	解的个数
已知两角及其中一角的对边,如 A,B,a	(1)由 $A+B+C=180°$,求 C; (2)根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 及 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,求 b,c.	一解
已知两边及其中一边的对角,如 a,b,A	(1)根据正弦定理,经讨论求 B; (2)求出 B 后,由 $A+B+C=180°$,求 C; (3)再根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,求 c.	一解
已知三边	可以连续用余弦定理的推论求出两角,再由 $A+B+C=180°$,求第三个角. 由余弦定理的推论求出一个角后,也可以根据正弦定理求出第二个角,但应先求较小边所对的角	一解
已知两边及其夹角,如 a,b,C	(1)根据余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,求 c; (2)根据 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,求 A; (3)根据 $B=180°-A+C$,求 B.	两解、一解或无解

题型一　程序框图问题

例 1　(江苏省无锡市第一中学课时练)执行下面的程序框图,如果输入的 $x=0$,$y=1$,$n=1$,则输出 x,y 的值满足

A. $y=2x$　　　　B. $y=3x$

C. $y=4x$　　　　D. $y=5x$



【命题立章】　本题考查程序框图的知识,意在考查考生分析问题、解决问题的能力,考查的核心素养是数学运算.

【解析】 运行程序,第 1 次循环得 $x=0,y=1,n=2$;第 2 次循环得 $x=\frac{1}{2},y=2,n=3$;第 3 次循环得 $x=\frac{3}{2}$, $y=6$,此时 $x^2+y^2\geqslant 36$,输出 x,满足 C 选项. 故选 C.

【技巧点拨】 解决此类问题的关键是读懂程序框图,明晰顺序结构、条件结构、循环结构的真正含义. 本题巧妙而自然的将程序框图、不等式交汇在一起,考查循环结构. 一般地,循环结构中都有一个计数变量和累加变量:计数变量用于记录循环次数,同时它的取值还用于判断循环是否终止;累加变量用于表示每一步的计算结果. 计数变量和累加变量一般是同步进行的,累加一次,记数一次.

题型二　平面向量问题

例 2　(河北省衡水市冀州中学月考)已知 O 为平面内的定点,A,B,C 是平面内不共线的三点,若$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=\mathbf{0}$,则$\triangle ABC$ 是

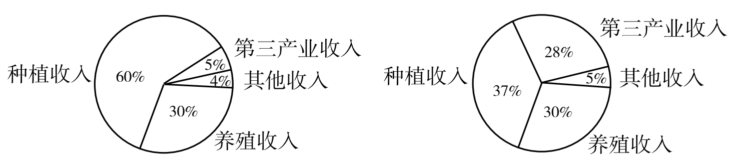
A. 以 AB 为底边的等腰三角形　　B. 以 BC 为底边的等腰三角形

C. 以 AB 为斜边的直角三角形　　D. 以 BC 为斜边的直角三角形

【解析】 设 BC 的中点为 M,则化简$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$,得到$\overrightarrow{CB}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$,则$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$,$\therefore \overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{AM}$,$\therefore AM$ 是$\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线,也是高,故$\triangle ABC$ 是以 BC 为底边的等腰三角形. 故选 D.

题型三　概率、统计问题

例 3　(山西省长冶一中单元检测)某地区经过一年的新农村建设,农村的经济收入增加了一倍,实现番翻. 为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况,统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例,得到如图所示的饼图:



建设前经济收入构成比例　　建设后经济收入构成比例

则下面结论中正确的是

A. 新农村建设后,种植收入减少

D. 新农村建设后,其他收入增加了一倍以上

C. 新农村建设后,养殖收入增加了一倍

D. 新农村建设后,养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

【命题立意】 本题主要考查以实际生活为背景的统计知识等,考查考生的化归与转化能力、运算求解能力,考查的核心素养是数学运算、数学分析.

【解析】 **通解**　设建设前经济收入为 a,则建设后经济收入为 $2a$,则由饼图可得建设前种植收入为 $0.6a$,其它收入为 $0.04a$,养殖收入为 $0.3a$. 建设后种植收入为 $0.74a$,其他收入为 $0.1a$,养殖收入为 $0.6a$,养殖收入与第三产业收入的总和为 $1.16a$,所以新农村建设后,种植收入减少是错误的. 故选 A.

优解　$\because 0.6<0.37\times 2$,所以新农村建设后,种植收入增加,而不是减少,所以 A 是错误的. 故选 A.

【误区警示】 审题时若没有注意到建设后农村的经济收入翻番,而直接观察饼图进行比较,就会得到错误的选项.

例 4　(浙江省瑞安市十校高三联考)某公司为了解用户对其产品的满意度,从 A,B 两地区分别随机调察了

20 个用户,得到用户对产品的满意度评分如下:

A 地区:62　73　81　92　95　85　74　64　53　76

78　86　95　66　97　78　88　82　76　89

B 地区:73　83　62　51　91　46　53　73　64　82

93　48　65　81　74　56　54　76　65　79

(1)根据两组数据完成两地区用户满意度评分的茎叶图,并通过茎叶图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度(不要求计算出具体值,给出结论即可);

A 地区		B 地区
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	

(2)根据用户满意度评分,将用户的满意度从低到高分为三个等级:

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

记事件 C:"A 地区用户的满意度等级高于 B 地区用户的满意度等级". 假设两地区用户的评价结果相互独立. 根据所给数据,以事件发生的概率作为相应事件发生的频率,求 C 的概率.

【解析】　(1)两地区用户满意度评分的茎叶图如下:

A 地区		B 地区
	4	6　8
3	5	1　3　6　4
6　4　2	6	2　4　5　5
6　8　8　6　4　3	7	3　3　4　6　8
9　2　8　6　5　1	8	3　2　1
7　5　5　2	9	1　3

通过茎叶图可以看出,A 地区用户满意度评分的平均值高于 B 地区用户满意度评分的平均值;A 地区用户满意度评分比较集中,B 地区用户满意度评分比较分散.

记 C_{A1} 表示事件:"A 地区用户的满意度等级为满意或非常满意";

C_{A2} 表示事件:"A 地区用户的满意度等级为非常满意";

C_{B1} 表示事件:"B 地区用户的满意度等级为不满意";

C_{B2} 表示事件:"B 地区用户的满意度等级为满意",

则 C_{A1} 与 C_{B1} 独立,C_{A2} 与 C_{B2} 独立,C_{B1} 与 C_{B2} 互斥,$C=C_{B1}C_{A1}\cup C_{B2}C_{A2}$.

$P(C)=P(C_{B1}C_{A1}\cup C_{B2}C_{A2})$

$=P(C_{B1}C_{A1})+P(C_{B2}C_{A2})$

$=P(C_{B1})P(C_{A1})+P(C_{B2})P(C_{A2})$.

由所给数据得 $C_{A1},C_{A2},C_{B1},C_{B2}$ 发生的频率分别为 $\frac{16}{20},\frac{10}{20},\frac{4}{20},\frac{8}{20}$,故 $P(C_{A1})=\frac{16}{20}$,$P(C_{B1})=\frac{4}{20}$,$P(C_{A2})=\frac{10}{20}$,$P(C_{B2})=\frac{8}{20}$,

$P(C)=\frac{10}{20}\times\frac{16}{20}+\frac{8}{20}\times\frac{4}{20}=0.48$.

题型四　三角函数、三角恒等变换问题

例 4　(北京市昌平区 2017－2018 学年期末)已知 $\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{7\sqrt{2}}{10}$,$\cos 2\alpha=\frac{7}{25}$,求 $\sin\alpha$ 及 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{3})$.

【解析】 因为$\frac{7}{25}=\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$,

所以$\sin^2\alpha=\frac{9}{25}$,即$\sin\alpha=\pm\frac{3}{5}$. ①

由$\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{7\sqrt{2}}{10}$,可得$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$. ②

由①②得$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$或$\frac{3}{10}$,

所以$\tan(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\alpha\cdot\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{-\frac{3}{4}+\sqrt{3}}{1-(-\frac{3}{4})\times\sqrt{3}}=\frac{48-25\sqrt{3}}{11}$,

或$\tan(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{\frac{3}{10}+\sqrt{3}}{1-\frac{3}{10}\times\sqrt{3}}=\frac{117+130\sqrt{3}}{73}$.

题型五 数列问题

例6 (湖北省孝感高级中学月考)S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和,已知$a_n>0$,$a_n^2+2a_n=4S_n+3$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$,求数列$\{b_n\}$的前n项和.

【命题立意】 本题考查了利用a_n与S_n的关系求数列的通项公式以及分组求和法求和,考查考生解决问题以及探究问题的能力. 首先利用a_n与S_n的关系$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$推导出数列$\{a_n\}$的通项公式,然后利用裂项相消法求数列$\{b_n\}$的前$n$项和即可.

【解析】 (1)由$a_n^2+2a_n=4S_n+3$,可知$a_{n+1}^2+2a_n+1=4S_{n+1}+3$.

可得$a_{n+1}^2-a_n^2+2(a_{n+1}-a_n)=4a_{n+1}$,即

$2(a_{n+1}+a_n)=a_{n+1}^2-a_n^2=(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)$.

由于$a_n>0$,可得$a_{n+1}-a_n=2$.

又$a_1^2+2a_1=4a_1+3$,解得$a_1=-1$(舍去)或$a_1=3$.

所以a_n是首项为3,公差为2的等差数列,通项公式为$a_n=2n+1$.

(2)由$a_n=2n+1$可知

$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})$.

设数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n,则

$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\frac{1}{2}[(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})]$

$=\frac{n}{2(2n+3)}$. (12分)

【规律总结】 求解有关数列的综合题,首先要善于从宏观上整体把握问题,能透过给定信息的表象,揭示问题的本质,然后从微观上明确解题方向,化难为易,化繁为简,注意解题的严谨性. 数列问题对能力的要求较高,特别是运算能力、归纳猜想能力、转化能力、逻辑推理能力.

题型六　圆椎曲线问题

例 7　(安徽省六校教育研究会高三测试)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,点$(2,\sqrt{2})$在 C 上.

(1)求 C 的方程;

(2)直线 l 不过原点 O 且不平行与坐标轴,l 与 C 有两个交点 A,B,线段 AB 的中点为 M. 证明:直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率的乘积为定值.

【命题立意】　本题主要考查直线与圆锥曲线中椭圆的综合应用,具体涉及椭圆方程的求法、直线与圆锥曲线的相关知识,意在考查考生的推理论证能力,运算求解能力以及数形结合的数学思想,考查的核心素养是数学运算、直观抽象.

【解析】　(1)由题意有$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1$,

解得 $a^2=8$,$b^2=4$.

所以 C 的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)设直线 $l:y=kx+b(k\neq0,b\neq0)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$M(x_M,y_M)$

将 $y=kx+b$ 代入$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 得

$(2k^2+1)x^2+4kbx+2b^2-8=0$.

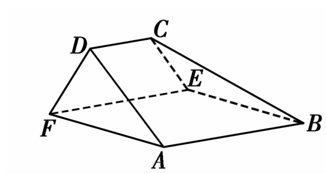
故 $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-2kb}{2k^2+1}$,$y_M=k\cdot x+b=\frac{b}{2k^2+1}$.

于是直线 OM 的斜率 $k_{OM}=\frac{y_M}{x_M}=-\frac{1}{2k}$,即 $k_{OM}\cdot k=-\frac{1}{2}$.

所以直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率的的乘积为定值.

题型七　立体几何问题

例 8　(山东省临沂市高三检测)如图,在以 A,B,C,D,E,F 为顶点的五面体中,平面 $ABEF$ 为正方形,$AF=2FD$,$\angle AFD=90°$,且二面角 $D-AF-E$ 与二面角 $C-BE-F$ 都是 $60°$.



(1)证明:平面 $ABEF\perp$平面 $EFDC$;

(2)求二面角 $E-BC-A$ 的余弦值.

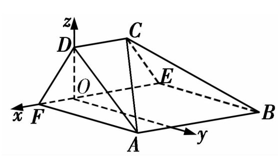
【命题立意】　本题主要考查面面垂直的证明及面面角的余弦值的求解,意在考查考生的空间想象能力和运算求解能力,考查的核心素养是数学运算、逻辑推理.

【解析】　(1)由已知可得 $AF\perp DF$,$AF\perp FE$,所以 $AF\perp$平面 $EFDC$.

又 $AF\subset$平面 $ABEF$,故平面 $ABEF\perp$平面 $EFDC$.

(2)过 D 作 $DG\perp EF$,垂足为 G,由(1)知 $DG\perp$平面 $ABEF$.

以 G 为坐标原点,$\overrightarrow{GF}$的方向为 x 轴正方向,$|\overrightarrow{GF}|$为单位长,建立如图所示的空间直角坐标系 $G-xyz$.



由(I)知$\angle DFE$ 为二面角 $D-AF-E$ 的平面角,故$\angle DFE=60^0$,则 $DF=2$,$DG=\sqrt{3}$,可得 $A(1,4,0)$,$B(-3,4,0)$,$E(-3,0,0)$,$D(0,0,\sqrt{3})$.

由已知，$AB \parallel EF$，所以 $AB \parallel$ 平面 $EFDC$.

又平面 $ABCD \cap$ 平面 $EFDC = CD$，故 $AB \parallel CD$，$CD \parallel EF$.

由 $BE \parallel AF$，可得 $BF \perp$ 平面 $EFDC$，所以 $\angle CEF$ 为二面角 $C-BE-F$ 的平面角，$\angle CEF = 60°$. 从而可得 $C(-2,0,\sqrt{3})$.

连接 AC，则 $\overrightarrow{CE} = (1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EB} = (0,4,0)$，$\overrightarrow{AC} = (-3,-4,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB} = (-4,0,0)$.

设 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$ 是平面 BCE 的法向量，则

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CE} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{EB} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} x + \sqrt{3}z = 0, \\ 4y = 0, \end{cases}$$

所以可取 $\boldsymbol{n} = (3,0,-\sqrt{3})$.

设 $\boldsymbol{m}$ 是平面 $ABCD$ 的法向量，则 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \end{cases}$

同理可取 $\boldsymbol{m} = (0,\sqrt{3},4)$. 则 $|\cos\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{m} \rangle| = \dfrac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|} = \dfrac{2\sqrt{19}}{19}$.

故二面角 $E-BC-A$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$.

题型九　函数与导数问题

例 9　（广东省佛山市 2018 届高三统一摸底考试）已知函数 $f(x) = ax^2 - ax - x\ln x$，且 $f(x) \geqslant 0$.

（1）求 a；

（2）证明：$f(x)$ 存在唯一的极小值点 x_0，且 $e^{-2} < f(x_0) < 2^{-2}$.

【思路点拨】　求解第（1）问时，构造函数 $g(x) = ax - a - \ln x$，由 $g(1) = 0$，$g'(x) \geqslant 0$ 可知 $g'(1) = 0$，进而得 $a = 1$，当 $a = 1$ 时，易知 $0 < x < 1$ 时，$g(x)$ 单调递减，当 $x > 1$ 时，$g(x)$ 单调递增，满足题意，所以 $a = 1$；求解第（2）问时，令 $h(x) = 2x - 2 - \ln x$，则 $h'(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$，易知，当 $0 < x < \dfrac{1}{2}$ 时，$h(x)$ 单调递减. 又 $h(e^{-2}) > 0$，$h(\dfrac{1}{2}) < 0$，$h(1) = 0$，得 $h(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上有唯一零点 x_0，在 $[\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上有唯一零点 1，然后证明 $f(x)$ 有唯一的极大值点 x_0，进而得 $e^{-2} < f(x_0) < 2^2$.

【解析】　（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

设 $g(x) = ax - a - \ln x$，

则 $f(x) = xg(x)$，$f(x) \geqslant 0$ 等价于 $g(x) \geqslant 0$.

因为 $g(1) = 0$，$g(x) \geqslant 0$，故 $g'(1) = 0$，

而 $g'(x) = a - \dfrac{1}{x}$，$g'(1) = a - 1$，得 $a = 1$.

若 $a = 1$，则 $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$. 当 $0 < x < 1$ 时，$g'(x) < 0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x > 1$ 时，$g'(x) > 0$，$g(x)$ 单调递增. 所以 $x = 1$ 是 $g(x)$ 的极小值，故 $g(x) \geqslant g(1) = 0$.

综上，$a = 1$.

（2）由（1）知 $f(x) = x^2 - x - x\ln x$，$f'(x) = 2x - 2 - \ln x$.

设 $h(x) = 2x - 2 - \ln x$，则 $h'(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$.

当 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 时,$h'(x)>0$;当 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ 时,$h'(x)<0$. 所以 $h(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 单调递增,在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 单调递减.

又 $h(e^{-2})>0$,$h(\frac{1}{2})<0$,$h(1)=0$,所以 $h(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 有唯一零点 x_0,在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 有唯一零点 1,且当 $x\in(0,x_0)$ 时,$h(x)>0$;当 $x\in(x_0,1)$ 时,$h(x)<0$;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$h(x)>0$.

因为 $f'(x)=h(x)$,所以 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的唯一极大值点.

由 $f'(x_0)=0$ 得 $\ln x_0=2(x_0-1)$,故 $f(x_0)=x_0(1-x_0)$.

由 $x_0\in(0,\frac{1}{2})$ 得 $f(x)<\frac{1}{4}$.

因为 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 的最大值点,由 $e^{-1}\in(0,1)$,$f(e^{-1})\neq 0$ 得 $f(x_0)>f(e^{-1})=e^{-2}$.

所以 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.